

LBRIS

We know
books

Matematică LA MINUT

*Probleme pentru
tineri de 14-18 ani
...și nu numai!*

Selecție realizată de RÓKA SÁNDOR

Traducerea: HORVÁTH ALEXANDRU



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.

Cuprins

Introducere	7
I Probleme	9
I	11
II	12
III	13
IV	14
V	15
VI	16
VII	17
VIII	18
IX	19
X	20
XI	21
XII	23
XIII	24
XIV	25
XV	26
XVI	27
XVII	28
XVIII	29
XIX	30
XX	31

XXI	32
XXII	33
XXIII	34
XXIV	35
XXV	36
XXVI	37
XXVII	38
XXVIII	39
XXIX	40
XXX	41
II Soluții	43
I	45
II	47
III	49
IV	53
V	58
VI	61
VII	63
VIII	67
IX	72
X	77
XI	81
XII	84
XIII	89
XIV	93
XV	95
XVI	99
XVII	103
XVIII	108
XIX	113
XX	119
XXI	122

XXII	125
XXIII	132
XXIV	137
XXV	141
XXVI	143
XXVII	145
XXVIII	151
XXIX	155
XXX	158

Descompuneți polinoamele de mai jos în factori de grad inferior gradului polinomului dat.

1. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

2. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

3. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

4. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

5. $x^4 + x^2 + 1$

6. $x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$

7. $x^4 + 4$

8. $4x^4 + 1$

9. $x^4 - 7x^2 + 1$

10. $x^5 + x^4 + 1$

11. $x^4 + x^2y^2 + y^4$

12. $2x^2 - x - 36$

13. $x^4 - 10x^2 + 169$

14. $8x^3 + x - 66$

15. Simplificați expresia de mai jos:

$$\frac{x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$$

1. Arătați că numărul de mai jos este întreg!

$$\sqrt{10 + 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{6}}$$

2. Calculați valoarea expresiei de mai jos!

$$\sqrt{5 - \sqrt{24}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}}$$

3. Arătați că numărul de mai jos este întreg!

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}$$

4. Arătați că numărul de mai jos este întreg!

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

5. Arătați că numărul de mai jos este întreg!

$$(\sqrt{2} + 1)^3 - (\sqrt{2} - 1)^3$$

6. Arătați că numărul de mai jos este întreg!

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\right)^3$$

7. Arătați că numărul de mai jos este întreg!

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

8. Calculați valoarea produsului de mai jos!

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

9. Calculați valoarea produsului de mai jos!

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$$

1. $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = ?$

2. $\frac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2} = ?$

3. Calculați valoarea produsului $96 \cdot 104$, fără a efectua înmulțirea!

4. Descompuneți numărul 899 în factori primi!

5. Verificați egalitatea $7778^2 - 2223^2 = 55\,555\,555$.

6. $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = ?$

7. Simplificați expresia de mai jos!

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^8 + \frac{1}{x^8}\right)$$

8. Calculați valoarea fracției de mai jos!

$$\frac{1234567890}{1234567891^2 - 1234567890 \cdot 1234567892}$$

9. Calculați valoarea sumei de mai jos!

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

10. Demonstrați egalitatea de mai jos!

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{32}{1-x^{32}}$$

1. $a + b + c = 0$. Arătați că $ab + bc + ca \leq 0$.
2. Arătați că, dacă $x + y + z = 0$ și $xy + yz + zx = 0$, atunci $x = y = z$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Arătați că $a = b = c$.
4. Fie $(a + b + c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Arătați că $a = b = c$.
5. Fie $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Arătați că $a = b = c$.
6. Presupunem că $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ și $ac + bd = 0$. Ce valoare are $bc - ad$?
7. Suprafața unui paralelipiped dreptunghic este 48 cm^2 , iar suma lungimilor muchiilor sale este 13 cm . Calculați lungimea diagonalei paralelipipedului?
8. Dacă $x > 0$ și $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$, atunci ce valori poate lua expresia $x^3 + \frac{1}{x^3}$?
9. Dacă $xyz = 1$ și $1 + x + xy \neq 0$, atunci arătați că

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

10. Laturile a, b, c ale unui triunghi verifică egalitatea $\frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} = 0$. Ce valori au unghiurile acestui triunghi?
11. $a = \frac{xy}{x+y}$, $b = \frac{yz}{y+z}$ și $c = \frac{zx}{z+x}$. Exprimați valoarea lui x cu ajutorul lui a, b și c !
12. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = ?$
13. Se știe că $100 = 6^2 + 8^2$. Construiți o soluție în mulțimea numerelor întregi pentru ecuația $x^2 + y^2 = 10\,000$!
14. Calculați valoarea sumei de mai jos!

$$\frac{1}{100^{-99} + 1} + \frac{1}{100^{-98} + 1} + \dots + \frac{1}{100^0 + 1} + \dots + \frac{1}{100^{99} + 1}$$

1. $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx$ și presupunem că $f(2) = 5$. Ce valoare are $f(-2) = ?$

2. $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 7$ și presupunem că $f(7) = 7$. Ce valoare are $f(-7) = ?$

3. Ce valoare are suma coeficienților polinomului $g(x) = (x + 2)(x^2 + 2x + 1)$?

4. Dacă $(3x - 1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, atunci $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = ?$

5. Calculați suma coeficienților polinomului rezultat din calculul expresiei de mai jos!

$$(1 - 3x + 3x^2)^{1997}(1 + 3x - 3x^2)^{1998}$$

6. Polinoamele $x^4 + 6x^2 + 25$ și $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ au un divizor comun de forma $x^2 + bx + c$. Determinați acest polinom!

7. Efectuăm înmulțirea $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100}) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{25})$. Care este valoarea coeficientului lui x^{50} ?

8. Efectuăm înmulțirea $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$. Arătați că, în polinomul rezultat figurează numai puteri pare ale lui x !

9. Ce valoare va avea coeficientul lui x^{17} respectiv al lui x^{18} în polinomul rezultat din expresia $(x^7 + x^5 + 1)^{20}$?

10. De ce nu poate avea un polinom de gradul 3, patru rădăcini distincte două câte două?

11. Arătați că egalitatea de mai jos este o identitate!

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

1. Câte cifre are numărul $2^{12} \cdot 5^8$?
2. Calculați suma cifrelor numărului $(10^{4n^2+8} + 1)^2$.
3. $317^2 + 217^2 - 634 \cdot 217 = ?$
4. $4\,444\,445^2 + 1\,111\,111 - 4\,444\,444^2 = ?$
5. Demonstrați că, dacă intercalăm oricâte, dar același număr de zerouri între fiecare pereche de cifre alăturate ale numărului 1331, obținem de fiecare dată un cub perfect.
6. Calculați valoarea lui 101^4 .
7. 190 246 849 și 190 302 025 sunt pătratele a două numere consecutive impare. Care este pătratul perfect aflat între aceste două numere?
8. Arătați că primele 3 cifre zecimale de după virgulă ale numărului $(\sqrt{26} + 5)^3$ sunt toate nule!
9. Dacă n este un pătrat perfect, atunci dați o formulă a pătratului perfect următor, în funcție de n ?
10. Argumentați, de ce egalitatea $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ este falsă!

1. Dacă $-3 \leq a \leq 1$, atunci între ce limite variază a^2 ?
2. Dacă $-3 \leq a \leq 1$, atunci între ce limite variază $|a|$?
3. Dacă $-3 \leq a \leq 1$, atunci între ce limite variază $\frac{1}{a}$?
4. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \log_x x^2$!
5. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \frac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}$!
6. Reprezentați grafic funcția $f(x) = \cos |x| + |\cos x|$!
7. Reprezentați grafic funcția $f(x) = |\sin x| \cdot \sin x + |\cos x| \cdot \cos x$!
8. Determinați punctele planului $(x; y)$, pentru care avem relația $x + |x| = y + |y|$!
9. Determinați punctele planului $(x; y)$, pentru care avem relația $|x + y| + |x - y| \leq 4$!
10. Determinați punctele planului $(x; y)$, pentru care avem relația $\log_y x < 1$!
11. Determinați punctele planului $(x; y)$, pentru care avem relația $\log_{xy} x > 1$!
12. Determinați punctele planului $(x; y)$, pentru care avem relația $\log_{|y|} |x| > 0$!

VIII

Rezolvați ecuațiile și inecuațiile de mai jos în mulțimea numerelor reale!

1. $(x + 2)\sqrt{x - 1} = 0$

2. $x^2 \cdot (x + 1) > 0$

3. $(x^3 - 1)^2 + (x^4 - 1)^2 = 0$

4. $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 2$

5. $8(x^4 + y^4) - 4(x^2 + y^2) + 1 = 0$

6. $x^2 + y^2 + 10 = 2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y$

7. $x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 2x + 2y - z + 3 = 0$

8. $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 4} = 3$

9. $x + \frac{1}{x - 1991} = 1991 + \frac{1}{x - 1991}$

10. $\frac{1}{x} < 1$

11. $1 - x + \frac{1}{1 - x} < 0$

12. $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = 0$

13. $x + \frac{1}{x} = 5, 2$

14. $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = 2, 5$

15. $x^2 + 2x + 15 = 2x\sqrt{2x + 15}$

Rezolvați ecuațiile și inecuațiile de mai jos în mulțimea numerelor reale!

1. $x^3 + 6x^2 - 4x - 24 = 0$

2. $x^4 - 8x + 63 = 0$

3. $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$

4. $(6 - x)^4 + (8 - x)^4 = 16$

5. $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3$

6. $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$

7. $9x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

8. $\frac{x-5}{100} + \frac{x-4}{101} + \frac{x-3}{102} = \frac{x-100}{5} + \frac{x-101}{4} + \frac{x-102}{3}$

9. $\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7$

10. $\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{x-2} = 3$

11. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \frac{1}{x^2}$

12. $(x-1)^3(x-2)^5(x-3)^7(x-4)^{10} < 0$

13. $x^2(2x-3)(x^2-2x+5) > 0$

1. Pentru ce valori ale parametrului real m are ecuația $(m+1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ două rădăcini reale?
2. Presupunem că ecuația $x^2 + 5x + c = 0$ are o rădăcină pozitivă și una negativă. Poate fi c un număr pozitiv?
3. Presupunem că expresia $ax^2 + bx + c$ are valori pozitive oricare ar fi valoarea lui x . Poate fi c un număr negativ?
4. Presupunem că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu are rădăcini reale, și că $a + b + c < 0$. Determinați semnul lui c !
5. Arătați că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini raționale dacă coeficienții a , b și c au valorile 1, 2 și 3, într-o ordine potrivit aleasă.
6. Presupunem că expresia $ax^2 + bx + c$ ia valori întregi pentru orice valoare întregă a lui x . Arătați că $2a$, $a + b$ și c sunt tot numere întregi!
7. Presupunem că rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$ sunt chiar p și q . Determinați valorile lui p și q !
8. Demonstrați că rădăcinile ecuației $x^{10} + px^7 + q = 0$ nu sunt numere întregi dacă p și q sunt numere întregi impare!
9. Presupunem că rădăcinile ecuației $x^2 - px + q = 0$ sunt numere întregi, iar p și q sunt numere prime. Determinați rădăcinile ecuației!
10. Presupunem că rădăcinile ecuației $5x^2 - px + q = 0$ sunt numere raționale, iar p și q sunt numere prime. Determinați rădăcinile ecuației!
11. Pătratele rădăcinilor ecuației $x^2 + ax + b + 1 = 0$ sunt numere întregi. Arătați că numărul $a^2 + b^2$ este compus!